ТЕХНІЧНІ НАУКИ

DOI: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2021-4-92-1>

UDC 539.3

**Trubachev Serhii, Kolodezhnyi Valerii,
Petryk Vladyslav, Sirenko Anatolii**National Technical University of Ukraine
«Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky»

OSCILLATIONS OF LAYED STRUCTURES WITH CONSOLIDATED MECHANICAL CHARACTERISTICS

Summary. Modern industry requires the creation and use of materials and structures with improved performance. Such structures include layered structures made of composite materials. Layered systems made of high-strength composite materials with different layers have found wide application in aviation technology as elements of the bearing surfaces of aircraft, as well as in many other industries. The use of composite plates in loaded structures is one way to improve the weight characteristics of rocket and space technology. Also layered structural elements are widely used in transport engineering, used in construction practice. Multilayer systems in the conditions of bending deformation are the most rational in terms of strength and rigidity. Thus, the improvement of methods for calculating inhomogeneous layered structures is an urgent task. Along with the methods of non-destructive testing, defectoscopy of structures using hardware methods, analytical research methods remain relevant, which allow to predict the possible destruction of the structure. When designing equipment, it is necessary to take into account the real operating conditions of structures. In the process, the mechanisms work under the action of vibration loads, so determining the dynamic characteristics of structures is an urgent task. This determines the need to study the oscillating processes taking into account the real conditions of vibration load, which will determine the optimal design parameters and modes of operation of the machine with the maximum distance from critical modes that are dangerous. One of the reasons for the destruction of elements of machine-building structures is that they resonate. Therefore, the problem of forced oscillations needs to be solved. To solve this problem, it is necessary to determine the natural frequencies and their corresponding natural forms of oscillations. The paper presents a method of calculating a layered structure to determine the physical characteristics for the whole package, taking into account the physical and mechanical characteristics of each of the layers. This approach allows to determine the dynamic characteristics and stress-strain state of multilayer composite structures, using classical equations for homogeneous structures. This approach greatly simplifies the equation and allows you to find a solution that can be used in the design of structures made of composite materials under vibration loads.

Keywords: mechanical characteristics, layered structures, natural oscillations, equations, stress-strain state.

**Трубачев С.І., Колодежний В.А.,
Петрик В.О., Сіренко А.П.**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

КОЛИВАННЯ ШАРОВАНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗІ ЗВЕДЕНИМИ МЕХАНІЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Анотація. Сучасна промисловість вимагає створення та використання матеріалів та конструкцій з поліпшеними експлуатаційними показниками. До таких конструкцій відносяться шаровані конструкції, зроблені з композитних матеріалів. Шаровані системи, виготовлені з високоміцних композиційних матеріалів з різної укладанням шарів знайшли широке застосування в авіаційній техніці як елементи несучих поверхонь літальних апаратів, а також у багатьох інших галузях промисловості. Використання композитних пластин у навантажених конструкціях є одним із способів покращення вагових характеристик ракетно-космічної техніки. Також шаруваті елементи конструкцій широко використовуються в транспортному машинобудуванні, застосовуються в будівельній практиці. Багатошарові системи в умовах деформації згинання виявляються найбільш раціональними з точки зору міцності і жорсткості. Таким чином, вдосконалення методів розрахунку неоднорідних шаруватих конструкцій, є актуальним завданням. Поряд з методами неруйнівного контролю, дефектоскопії конструкцій за допомогою апаратних методів, актуальними залишаються і аналітичні методи дослідження, які дозволяють прогнозувати можливе руйнування конструкції. При проектуванні обладнання необхідно враховувати реальні умови роботи конструкцій. В процесі роботи механізми працюють під дією вібраційних навантажень, тому визначення динамічних характеристик конструкцій являє собою актуальну задачу. Це визначає необхідність проводити дослідження коливальних процесів з урахуванням реальних умов вібраційного навантаження, що дозволить визначити оптимальні параметри конструкції та режими роботи машини з максимальним віддаленням від критичних режимів, які є небезпечними. Однією з причин руйнації елементів машинобудівних конструкцій є те, що вони попадають у резонанс. У зв'язку з цим потрібно вирішення задачі про вимушені коливання. Для вирішення цієї задачі необхідно визначити власні частоти та відповідні їм власні форми коливань. В роботі представлений метод розрахунку шаруватої конструкції з визначення фізичних характеристик для всього пакета в цілому, враховуючи фізико-механічні характеристики кожного з шарів. Даний підхід дозволяє визначати динамічні характеристики, та напружено-деформований стан багато-

шарових композитних конструкцій, використовуючи класичні рівняння для однорідних конструкцій. Такий підхід значно спрощує рівняння і дозволяє знайти рішення, яке може бути використане при проектуванні конструкцій з композитних матеріалів, що знаходяться під дією вібраційних навантажень.

Ключові слова: механічні характеристики, шаровані конструкції, власні коливання, рівняння, напружено-деформований стан.

Formulation of the problem. Three-layer structures of various configurations are widely used in aircraft construction. In this regard, an urgent task is to study the dynamic characteristics of these systems. Studies carried out within the framework of the classical theory of thin shells are mainly aimed at studying the effect of the surface state on natural frequencies and shapes hesitation.

Analysis of recent research and publications. General solution to the problem of natural vibrations an isotropic cylindrical shell taking into account any boundary conditions was proposed in [1].

Qualitative analysis of the shapes and natural frequencies of thin elastic iso-tropic shells, as well as the study of the problem of frequency density and edge effects were considered in [2; 3; 4; 5; 6].

Selection of previously unsolved parts of the overall problem. The problems that arise when using the finite element method in membrane calculations are related to surface approximation and the volume of calculations. It should be emphasized that despite the development of numerical calculation methods, it is necessary to obtain an analytical solution that is more accurate.

The purpose of the article. Obtain formulas with the given mechanical characteristics of materials for determining the natural frequencies and modes of vibrations of three-layer plates symmetric with respect to the midplane.

Presenting main material. We consider that a three-layer plate is consisting of two identical outer layers of thickness h with elastic modulus E and the middle layer of thickness $2h$ with a modulus of elasticity E (Figure 1).

We define the reduced stiffness of sandwich plates from the condition of equality of the bending moments for composite plate and solid plate with the same sizes, which was made of a material of the outer layer.

For a solid plate the expression for the bending moment and stress can be written as

$$M_x = -D(W_{xx} + \nu W_{yy}),$$

$$\sigma_x = -\frac{E_z}{1-\nu^2}(W_{xx} + \nu W_{yy}),$$

where ν is the Poisson ratio.

Figure 1. The distribution of stresses in the layers of sandwich plates

Source: developed by the authors

Hence, excepting for the deflection W , we obtain

$$M_x = D \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\sigma_x}{z} = D \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\sigma_{x1}}{h_1+h_2}.$$

Let's find the relation between the stresses in the layers of the terms of the curvature ρ of the neutral layer of the composite plate

$$\sigma_x = \frac{z}{\rho} E.$$

We have

$$\sigma_{x1} = \frac{(h_1+h_2)}{\rho} E_1, \quad \sigma_{x2} = \frac{h_2 E_2}{\rho}.$$

Excluding the curvature, we obtain

$$\sigma_{x2} = \frac{h_2}{h_1+h_2} \cdot \frac{E_2}{E_1} \sigma_{x1}.$$

We define the bending moment of tension in the cross section

$$M_x = \int_{-h_2}^{h_2} \frac{\sigma_{x1}}{h_2} z^2 dz + 2 \int_{h_2}^{h_1+h_2} \frac{\sigma_{x1}}{h_1+h_2} z^2 dz = \frac{\sigma_{x2} I_2}{h_2} + \frac{\sigma_{x1} I_1}{h_1+h_2},$$

where I_1, I_2 – are the moments of inertia of the outer and middle layers, respectively.

After the substitution we get

$$D_n = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{1-\nu^2}.$$

We find the expression of Poisson's ratio for the three-layer structure of a single element:

$$\nu_n = \frac{\epsilon_y^n}{\epsilon_x}.$$

We are considering the equilibrium of each layer separately as shown in Figure 2.

The geometric relations, as shown in Figure 2, are

$$\epsilon_1 = \epsilon_{y1} - \epsilon_y^n, \quad \epsilon_2 = \epsilon_y^n - \epsilon_{y2}.$$

Considering Hooke's law for tension-compression

$$\epsilon = \frac{N}{EF}.$$

We obtain relations for the deformation of the layer

Figure 2. Displacement in the layers

Source: developed by the authors

$$\varepsilon_2 = \frac{E_1 h_1}{E_2 h_2} \varepsilon_1.$$

After substituting to the equation appropriate values and their farther solutions we have

$$\frac{h_2 E_2}{h_1 E_1} = \frac{v_1 - v_2}{v_n - v_2},$$

finally

$$v_n = \frac{v_1 E_1 h_1 + v_2 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}.$$

The cylindrical rigidity of the sandwich plate and the reduced mass are

$$D_n = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{1 - v_n^2},$$

$$m_n = \frac{2}{g} (h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2).$$

Differential equation of the damped oscillations has the form

$$D_n \nabla^2 w + m_n w_{tt} + k w_t = 0,$$

coefficient of resistance can be represented as

$$k = m_n \omega_\gamma,$$

after substituting in the equation of motion the function of deflections, we have

$$8D_n \left(\frac{3c_1}{a^4} + \frac{c_1 + c_2}{a^2 b^2} + \frac{3c_2}{b^4} \right) - \left(\frac{k^2}{4m_n^2} + \omega^2 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} c_1 + \frac{y^2}{b^2} c_2 - c_3 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

Let's look at the static boundary conditions $x = \pm a$, $y = 0$,

$$M_x = -D_n (w_{xx} + v_n w_{yy}) = \frac{1}{a^2} (5c_1 - c_3) + \frac{v_n}{b^2} (c_1 - c_3) = 0.$$

We obtain

$$c_1 = \frac{b^2 + v_n a^2}{5b^2 + v_n a^2} c_3 = k_1 c_3,$$

If $y = \pm b$, $x = 0$,

$$M_y = \frac{v_n}{a^2} (c_2 - c_3) + \frac{1}{b^2} (5c_2 - c_3) = 0.$$

We obtain

$$c_2 = \frac{a^2 + v_n b^2}{5a^2 + v_n b^2} c_3 = k_2 c_3.$$

In the center of the plate $x = 0$, $y = 0$ and natural frequency can be determined

$$\omega = \sqrt{\frac{32D_n}{m_n(\gamma^2 + 4)} \left(\frac{3k_1}{a^4} + \frac{k_1 + k_2}{a^2 b^2} + \frac{3k_2}{b^4} \right)}.$$

Conclusions and suggestions. The paper presents a method of calculating a layered structure to determine the physical characteristics for the whole package, taking into account the physical and mechanical characteristics of each of the layers. This approach allows to determine the dynamic characteristics and stress-strain state of multilayer composite structures, using classical equations for homogeneous structures. This approach greatly simplifies the equation and allows you to find a solution that can be used in the design of structures made of composite materials under the action of vibration loads. In addition, the determination of the fundamental frequency of oscillations allows the distance from the resonance, which is very important to prevent failure and to determine stable modes of operation of the structure.

References:

1. Shang Xin-chun (2001). An exact analysis for free vibration of a composite shell structure hermetic capsule. *Appl. Math. and Mech. Engl. Ed.*, no. 9, pp. 1035–1045.
2. Qatu Mohamad (2002). Recent research advanced in the dynamic behavior of shells: 1989–2000. Pt 1. Laminated composite shells. *Appl. Mech. Rev.*, no. 4, pp. 325–350.
3. Golushko S.K., Morozova E.V. (2005). Vliyaniye vybora modeli kompozitsionnogo materiala na napryazhenno-deformirovannoe sostoyaniye kol'tsevoj plastiny [Influence of the choice of a composite material model on the stress-strain state of an annular plate] // *Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Tr. XIX Vseros. konf., Bysk, 28-31 Avgusta 2005 g. Novosibirsk*, pp. 85–91. (in Russian)
4. Chemerys O.M., Kolodezhnyi V.A., Trubachev S.I. (2017). *Budivelnna mexanika mashyn* [Construction machinery mechanics]. Kyiv: Natsionalnyy tekhnichnyy universytet Ukrayiny "Kyivskyj politexnichnyy instytut imeni Igorya Sikorskogo", 258 p. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18961> (in Ukrainian)
5. Trubachev S.I., Kolodezhnyi V.A. (2017). Vyznachennya vlasnykh chastot i form kolyvan stryzhniv [Determination of natural frequencies and forms of oscillations of rods]. *Molodyj vchenyj*, no. 2, pp. 213–215. URL: <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2017/2/52.pdf> (in Ukrainian)
6. Trubachev S.I., Kolodezhnyi V.A. (2017). Rozрахунок bagatosharovykh fotoelektrychnykh moduliv sonyachnykh batarej [Calculation of multilayer photovoltaic modules of solar batteries]. *Molodyj vchenyj*, no. 3, pp. 761–763. URL: <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2017/3/174.pdf> (in Ukrainian)

Список літератури:

1. Shang Xin-chun. An exact analysis for free vibration of a composite shell structure hermetic capsule. *Appl. Math. and Mech. Engl. Ed.* 2001. № 9. P. 1035–1045.
2. Qatu Mohamad. Recent research advanced in the dynamic behavior of shells: 1989–2000. Pt 1. Laminated composite shells. *Appl. Mech. Rev.* 2002. № 4. P. 325–350.
3. Голушко С.К., Морозова Е.В. Влияние выбора модели композиционного материала на напряженно-деформированное состояние кольцевой пластины // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : Тр. XIX Всерос. конф., Бийск, 28-31 августа 2005 г. Новосибирск, 2005. С. 85–91.
4. Чемерис О.М., Колодежний В.А., Трубацев С.І. Будівельна механіка машин. Київ, 2017. 258 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/18961>
5. Трубацев С.І., Колодежний В.А. Визначення власних частот і форм коливань стрижнів. *Молодий вчений*. 2017. № 2. С. 213–215. URL: <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2017/2/52.pdf>
6. Трубацев С.І., Колодежний В.А. Розрахунок багатосарових фотоелектричних модулів сонячних батарей. *Молодий вчений*. 2017. № 3. С. 761–763. URL: <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2017/3/174.pdf>